**平面图顶点覆盖问题报告**

2021110608-孟悦琦

1. 背景介绍

在计算理论研究过程中，NP 完全问题是十分重要的一类问题。若语言 是 NP 完全问题，应满足：1. 是 NP 问题。2. 对于每一个 NP 问题，存在一个多项式时间内的规约，使得 规约到 。像我们熟知的SAT 问题，独立集问题（IS）都 NP 完全问题。顶点覆盖问题也是一类 NP 完全问题。并且，对于顶点覆盖问题，若加以平面图的条件限制，以及最大顶点度为 3 的条件限制后，仍然可以证明其是 NP 完全问题。以下给出详细证明：

1. 平面图NP完全问题证明

在证明过程中，使用了一关键结构。此结构如图1.1所示。该结构可以被命名为交叉结构（），它的四个出口位置被标记为。对于任意，满足0 ，那么，令表示所有顶点覆盖C的最小基数，顶点覆盖满足如下条件：

通过观察交叉结构，我们发现，当或时，的值和选取哪一个出口顶点无关。表1中给出了所有取值下，的值。通过观察表1，我们发现如下性质：对于，有：

对于给定的一个图，我们可以进行如下变换，生成新图。使用交叉（）结构变换，具体方法如下：

1. 将图在一个平面中表示，允许边之间存在交叉。
2. 对图中的每个交叉点，用交叉（）结构代替。

使用交叉结构来替代上的交点，这些交叉结构可以被称作是

上的交叉结构。连接上交叉结构与的，为上的边。是上的结点。临近结点的交叉结构出口被称作出口，临近的被称作出口。

我们令是图中使用交叉（）结构的数量。显然，中的边可以被分为两部分：（1）在上的边。（2）在个交叉结构上的边。通过使用顶点集合和每个交叉结构的出口或和每个交叉结构的出口，所有上的边可以被覆盖。而交叉结构中的边仅能使用交叉结构内部的结点进行覆盖。经过之前所描述的变换，中的所有边的交点，在中都被交叉结构所取代，因此，是一个平面图。并且，由于个顶点至多有条边，至多有个交点，显然这个规约可以在

时间内完成。于是我们只需要证明，对于任意，图有一个大小为的顶点覆盖当且仅当图有一个大小为的顶点覆盖。

首先，我们假设是图的顶点覆盖，并且。我们用如下方法对的顶点覆盖集进行构造。对于任意边，令为在中的的端点。构造集合：

由于是中的一个顶点覆盖，包含了所有中的边，于是有可以覆盖所有非交叉结构中的边。同时，由于每一个交叉结构在中被计算了两次，故有。之后要完成的便是覆盖交叉结构中未被覆盖的边。这是我们观察表1，由于每个交叉结构，每对出口都被覆盖了一次，那么由于，我们只需在每个交叉结构中添加11条边即可。令为每个交叉结构需要添加的11条边组成的集合。那么即为

的顶点覆盖，同时有，满足规约假设。

相反的，我们假设 中存在一个基数为的顶点覆盖。令：

对于每一个，我们定义：

这时，令表示一个符合条件的顶点覆盖。根据表1，由于至少在每个交叉结构中有13个结点，我们可以得到。于是我们仅需要证明是图的一个顶点覆盖。

我们使用反证法证明。假设不是，那么存在有，因此$。我们令时上的交叉结构数量。由于有条边在

上，故必须有至少个顶点在中，且由于都不再其中，这个顶点应都是交叉结构的出口。如果我们令为中有个交叉结构出口在中的数量，那么有，我们证明这样会产生矛盾。

我们令为上的第个交叉结构的全部结点，有，令。令 为一个包含出口和中非出口结点的顶点覆盖，在包含这些顶点的同时，具有最小基数。对每一个，为中第个交叉结构出口的个数。根据之前的(A)与(B)，得到：

令, 。由于，我们得到：

同时，根据之前的定义我们发现，至少比少一个交叉结构的出口顶点，同时有相同数量的交叉结构非出口顶点。同时我们发现，可以覆盖所有$S$覆盖的非交叉结构上的边。于是 是的顶点覆盖。同时：

这与的定义相矛盾，于是有 为的一个顶点覆盖。于是证明顶点覆盖问题在时间内规约到平面图顶点覆盖问题的正确性。

需要注意的是，当输入图的顶点度不超过3时，生成的图的顶点度不会超过6。这说明对于顶点度最多为6的平面图来说，其顶点覆盖问题是一个NP完全问题。

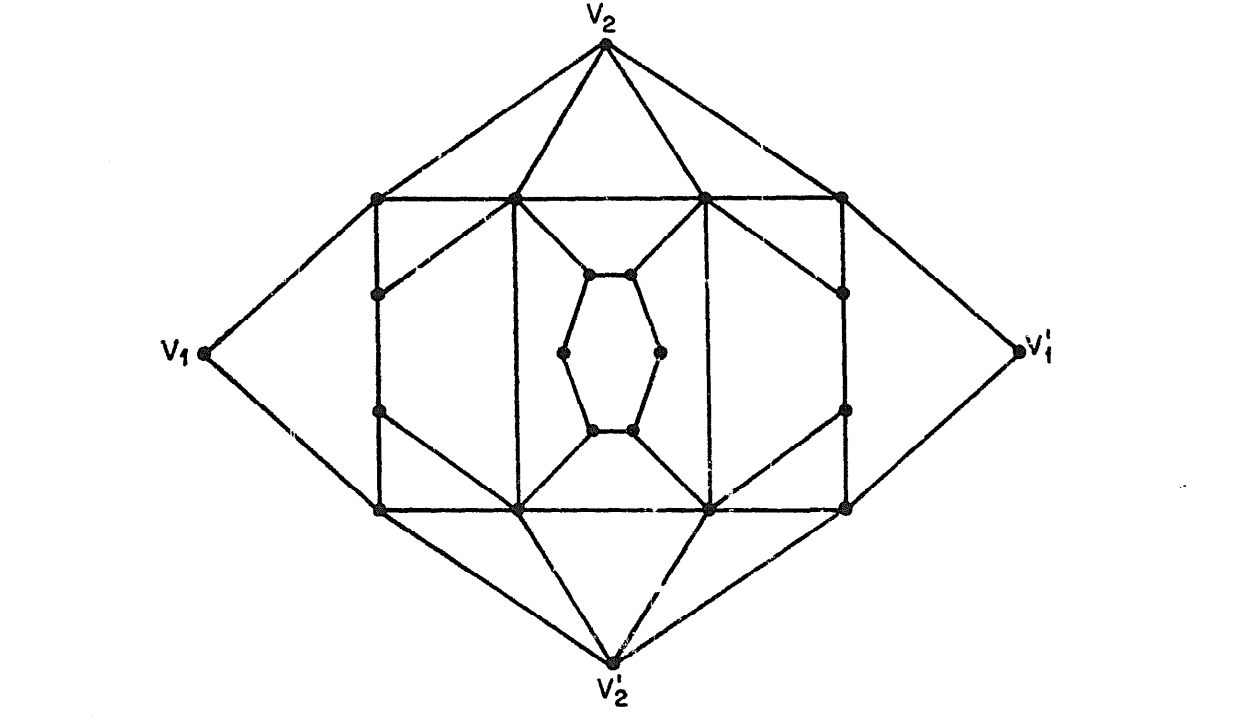


图1

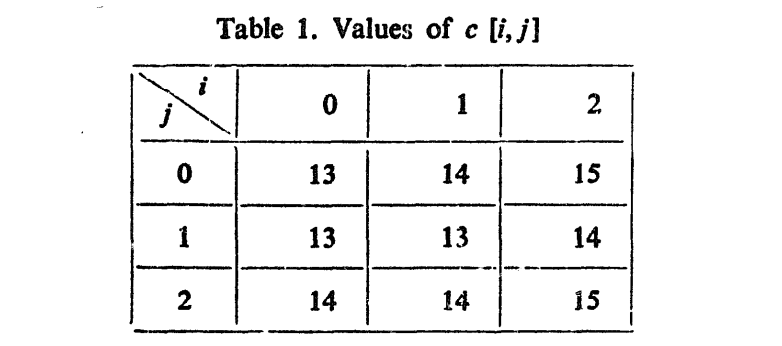


表1